Referat zum Thema "Mathematische Analyse des Lerninhalts"

1. – kurze Begriffsklärung

Def.1.1:
Ein Paar (G, +) bestehend aus einer Menge G und einer Abbildung + heißt Gruppe, falls:

a)
für $a, b \in G$ gilt: $a+b \in G$ (Abgeschlossenheit von +)
b)
$\exists\, e \in G$ mit $e+a = a$ (neutrales Element bzgl. +)
c)
$\forall\, a \in G\ \exists\, -a \in G$ mit $-a+a = e$ (inverses Element von a)
d)
$(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall\, a,b,c \in G$ (Assoziativgesetz)

Def.1.2:
$(K, +, \bullet)$ heißt Körper, falls:

a) (K, +) ist kommutative Gruppe
b) $(K\backslash\{0\}, \bullet)$ ist kommutative Gruppe
c) $a\bullet(b+c) = a\bullet b+a\bullet c$ (Distributivgesetz)

Def.1.3:
Eine Relation $\sim_R$ heißt Äquivalenzrelation über der Menge M, falls $\sim_R$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Def.1.4:
Sei $\sim_R$ eine Äquivalenzrelation über M. Für jedes $a \in M$ definieren wir die zu a gehörige Äquivalenzklasse $\bar{a}$ durch:

$$\bar{a} := \{ x \in M \mid x \sim_R a\}$$

Satz 1.1: M zerfällt bezüglich $\sim_R$ in Äquivalenzklassen. Sei $\Sigma = \{ \bar{a} \mid a \in M\}$, dann gilt:

1. $\bigcup_{\bar{a}\in\Sigma} \bar{a} = M$
2. Aus $a_1, a_2 \in \Sigma$ und $a_1 \cap a_2 \neq \emptyset$ folgt $a_1 = a_2$
3. $\forall\ \bar{a} \in \Sigma$ gilt $\bar{a} \neq \emptyset$

Satz 1.2:
Sei (G, +) eine kommutative Gruppe, dann hat die Gleichung $a+x = b$ genau eine Lösung ($a,b \in G$).

2. Ausgangspunkt

Die positiven rationalen Zahlen seien wohldefiniert.

Satz 2.1: $(\mathbb{Q}^+, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe.

Division:

$b \div a = x :\leftrightarrow a \bullet x = b$

Nach Satz 1.2 ist die Division in $(\mathbb{Q}^+, \bullet)$ uneingeschränkt ausführbar.

weiterhin:
Addition:

* $p+q = r$ ist lösbar, falls $p < r$, die Addition ist kommutativ und assoziativ
* $0+a = a$ für $a \in \mathbb{Q}^+$

Subtraktion:

$b-a = x :\leftrightarrow a+x = b$ ist ausführbar, falls $a < b$

Bemerkung: $(\mathbb{Q}^+, +)$ ist eine reguläre Halbgruppe, d.h. eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung.
regulär heißt: $a+b = c+b \rightarrow a = c$

"<" ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}^+$

Schließlich gilt das Distributivgesetz.

3. – Forderungen an den neuen Zahlbereich

Wir wollen den Bereich der positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$ zu einem Zahlbereich der rationalen Zahlen erweitern. Dabei stellen wir an den neuen Zahlbereich folgende Anforderungen:

i)
Die in $\mathbb{Q}^+$ gültigen Strukturgesetze sollen auch in $\mathbb{Q}$ gelten (Assoziativgesetze, neutrale Elemente, Kommutativgesetze, Distributivgesetz, Ordnungsrelation)

ii)
Jede Gleichung $a+x = b$ besitzt in $\mathbb{Q}$ genau eine Lösung.
Jede Gleichung $a \bullet x = b$ besitzt in $\mathbb{Q}$ genau eine Lösung.

iii)
$\mathbb{Q}$ soll minimal sein.

4. – Konstruktion der rationalen Zahlen durch Äquivalenzklassenbildung – "Neubau"

Def.4.1:

Durch ~ sei auf $M = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ eine binäre Relation gegeben mit:

$$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a + d = b + c$$

Satz 4.1: ~ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$

Zum Beweis ist zu zeigen:

a) $(x, y) \sim (x, y)\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ (Reflexivität)

b) $(a, b) \sim (c, d) \rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ (Symmetrie)

c) $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \rightarrow (a, b) \sim (e, f)$ (Transitivität)

gelte also: $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f)$

$\rightarrow a+d = b+c \wedge c+f = d+e$

$a+d = b+c \quad \vert +f$	$c+f = d+e \quad \vert +b$
$\leftrightarrow a+d+f = b+c+f$	$\leftrightarrow c+f+b = d+e+b$

$\Rightarrow a+d+f = d+e+b \rightarrow a+f = b+e$ (weil $(\mathbb{Q}^+, +)$ reguläre H.G.)

Nach Satz 1.1 zerlegt ~ die Menge M in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen.

$\rightarrow \overline{(a, b)} := \{(x, y) \mid a+y = b+x\}$

Folgerung:

$\overline{(a, b)} = \overline{(c, d)} \leftrightarrow a+d = b+c$

Def. 4.3:

$\mathbb{Q} := \{\overline{(a,b)} \mid a,b \in \mathbb{Q}^+\}$

Def. 4.3 (Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$):

i) $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} := \overline{(a+c, b+d)}$

ii) $\overline{(a, b)} \bullet \overline{(c, d)} := \overline{(ac + bd, ad + bc)}$

Rechtfertigung:
Wir müssen zeigen, daß das Ergebnis unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist.

zu i)
Die Definition ist nur sinnvoll, wenn die Klasse des Ergebnisses unabhängig ist von den ausgewählten Repräsentanten aus den Klassen $\overline{(a, b)}$ und $\overline{(c, d)}$

z.z.: $(a', b') \in \overline{(a, b)}$ und $(c', d') \in \overline{(c, d)}$, so

$\overline{(a'+c', b'+d')} = \overline{(a+c, b+d)}$

$\leftrightarrow a'+c'+b+d=b'+d'+a+c$

I: $a'+b = b'+a \quad |+c'|+d$ II: $c'+d=d'+c \quad |+b'+a$

$\leftrightarrow a'+b+c'+d = b'+a+c'+d$ $\leftrightarrow c'+d+b'+a = d'+c+b'+a$

$\leftrightarrow a'+c'+b+d = b'+a+c'+d$ $b'+a+c'+d = b'+d'+a+c$

nach Transitivität der Gleichheit muß gelten
$a'+b+c'+d = d'+c+b'+a$

q.e.d.

Def. 4.4:

$\overline{(a, b)} < \overline{(c, d)} :\leftrightarrow a+d < b+c$

Satz 4.2:

"<" nach obiger Definition ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$ (also irreflexiv, antisymmetrisch, transitiv, konnex).
konnex $\leftrightarrow$ a<b oder b<a für alle a,b

Satz 4.3:
$(\mathbb{Q}, +, \bullet)$ ist ein Körper.

Beweis:
Wir zeigen, daß $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\bullet)$ kommutative Gruppen sind und daß das Distributivgesetz gilt.

i) z.z.: $x, y \in \mathbb{Q} \rightarrow x+y \in \mathbb{Q}$
gilt nach Definition

ii) Existenz des neutralen Elementes bzgl. +:
$\overline{(a, b)}+\overline{(0, 0)}=\overline{(a+0, b+0)}=\overline{(a, b)}$

iii)
Existenz des inversen Elementes bzgl. +:
sei $\overline{(a, b)}+\overline{(b, a)}=\overline{(a+b, a+b)}=\overline{(0, 0)}$

v) z.z.: Kommutativgesetz bzgl. +:
$\overline{(a, b)}+\overline{(e, f)}=\overline{(a+e, b+f)}=\overline{(e+a, f+b)}=\overline{(e, f)}+\overline{(a, b)}$

iv)
Assoziativgesetz:
z.z.: $\left(\overline{(a, b)}+\overline{(c, d)}\right)+\overline{(e, f)}=\overline{(a,b)}+\left(\overline{(c,d)}+\overline{(e, f)}\right)$

$\rightarrow$ die erste Behauptung

Satz 4.3:
$p,q \in \mathbb{Q}$, dann $p \bullet q = 0 \leftrightarrow p = 0 \vee q = 0$

i´) z.z.: $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow x \bullet y \in \mathbb{Q}$
gilt nach Definition und nach Satz 4.3
ii´) Existenz des neutralen Elementes bzgl. •:
$$\overline{(a, b)} \bullet \overline{(1, 0)} = \overline{(a \bullet 1 + b \bullet 0, a \bullet 0 + b \bullet 1)} = \overline{(a, b)}$$
iii´) Existenz des inversen Elementes bzgl. +:
1. Fall, b<a:
$$\overline{(a, b)} \bullet \overline{\left(\frac{1}{a-b}, 0\right)} = \overline{\left(a \bullet \frac{1}{a-b} + b \bullet 0, a \bullet 0 + b \bullet \frac{1}{a-b}\right)} = \overline{(1, 0)}$$
2. Fall, a<b: dann leistet $\overline{\left(0, \frac{1}{b-a}\right)}$ das Verlangte
iv´) Assoziativgesetz:
$$\left(\overline{(a, b)} \bullet \overline{(c, d)}\right) \bullet \overline{(e, f)} = \overline{(a \bullet c + b \bullet d, a \bullet d + b \bullet c)} \bullet \overline{(e, f)} =$$
$$\overline{((a \bullet c + b \bullet d) \bullet e + (a \bullet d + b \bullet c) \bullet f, (a \bullet c + b \bullet d) \bullet f + (a \bullet d + b \bullet c) \bullet e)} =$$
$$\overline{(a \bullet c \bullet e + b \bullet d \bullet e + a \bullet d \bullet f + b \bullet c \bullet f, a \bullet c \bullet f + b \bullet d \bullet f + a \bullet d \bullet e + b \bullet c \bullet e)} =$$
$$\overline{(a \bullet (c \bullet e + d \bullet f) + b \bullet (c \bullet f + d \bullet e), a \bullet (c \bullet f + d \bullet e) + b \bullet (d \bullet f + c \bullet e))} =$$
$$\overline{(a, b)} \bullet \overline{(c \bullet e + d \bullet f, c \bullet f + d \bullet e)} =$$
$$\overline{(a, b)} \bullet \left(\overline{(c, d)} \bullet \overline{(e, f)}\right)$$

v´) Kommutativgesetz:
$$\overline{(a, b)} \bullet \overline{(c, d)} = \overline{(a \bullet c + b \bullet d, a \bullet d + b \bullet c)} = \overline{(c \bullet a + d \bullet b, c \bullet b + d \bullet a)}$$
$$= \overline{(c, d)} \bullet \overline{(a, b)}$$

→ die zweite Behauptung
v) z.z: $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$

Einbettung:
Zu zeigen ist noch , daß $\mathbb{Q}^+$ isomorph auf eine Teilmenge T von $\mathbb{Q}$ abgebildet (eingebettet) werden kann, d.h. $\mathbb{Q}^+$ und T sind isomorph zueinander.

Satz 4.5:
Die Abbildung $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow T \subset \mathbb{Q}$ mit $a \rightarrow \overline{(a, 0)}$ ist ein Isomorphismus (d.h ein bijektiver Homomorphismus).

Beweis:
i) z.z.: $f(a)+f(b) = f(a+b)$ $(a,b \in \mathbb{Q}^+)$
$f(a)+f(b) = \overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)} = \overline{(a+b, 0)} = f(a+b)$
ii) z.z.: $f(a) \bullet f(b) = f(a \bullet b)$ $(a,b \in \mathbb{Q}^+)$
$f(a) \bullet f(b) = \overline{(a, 0)} \bullet \overline{(b, 0)} = \overline{(a \bullet b, 0)} = f(a+b)$

$\rightarrow$ f ist Homomorphismus

iii) z.z.: f ist injektiv:

$a \neq b$ dann $f(a)=\overline{(a, 0)} \neq \overline{(b, 0)}=f(b)$, weil $a+0 \neq b+0$

iv) z.z.: f ist surjektiv,

d.h $\forall\ y \in T\ \exists\ x \in \mathbb{Q}^+$ mit $f(x) = y$

Nun kann man T als mit $\mathbb{Q}^+$ identifizieren und kann $\mathbb{Q}$ als Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{Q}^+$ deuten.

5. Einführung der negativen Zahlen durch Symmetrisierung – "Anbau"

Definition 5.1 (negative Zahl):
Als negative rationale Zahl definieren wir ein geordnetes Paar $(-, q)$ mit $q \in \mathbb{Q}^+$.
Schreibweise: $-q$
Die Menge aller negativen rationalen Zahlen wird bezeichnet als:

$$\mathbb{Q}^- := \{-q \mid q \in \mathbb{Q}^+\}$$

Für die Zahl 0 gilt $0 \neq q \wedge 0 \neq -q \;\forall\, q \in \mathbb{Q}^+$.
$-q = -r$, falls $q = r$
Als Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen bezeichnen wir als:

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$$

Definition 5.2 (Addition in $\mathbb{Q}$):
Für alle $p, q \in \mathbb{Q}^+$ sei:

$$p+(-q) := (-q)+p := \begin{cases} p-q, & \text{falls } p > q \\ 0, & \text{falls } p = q \\ -(q-p), & \text{falls } q > p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (-p)+(-q) &:= -(p+q) \\ p+0 &:= 0+p := p \\ 0+0 &:= 0 \\ (-q)+0 &:= 0+(-q) := -q \end{aligned}$$

Satz 5.1.:
$(\mathbb{Q}, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
Beweis:
i)
Abgeschlossenheit:
$p, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow p+q \in \mathbb{Q}$ (nach Def.2 und Def. von + in $\mathbb{Q}^+$)
ii)
Existenz des neutralen Elementes:
$0+p = p+0 = p$ für $p \in \mathbb{Q}$ (nach Def.2 und Def. von + in $\mathbb{Q}^+$)
iii)
zu jedem $p \in \mathbb{Q}$ ex. $-p \in \mathbb{Q}$ mit $p+(-p) = (-p)+p = 0$
1. Fall: $p \in \mathbb{Q}^+$, dann gilt $-p+p = 0$ nach Definition
2. Fall: $p \in \mathbb{Q}^-$, dann existiert ein $r \in \mathbb{Q}^+$ mit $p = -r$
$r+(-r) = 0$ nach Def. 2 $\rightarrow$ r ist das Inverse zu $-r$
$\rightarrow p+-(-r) = 0$
iv)
$p, q, r \in \mathbb{Q} \Rightarrow p+(q+r) = (p+q)+r$ (Assoziativgesetz) (selber)
v)
Kommutativgesetz:

Folgerung 5.1:
Die Gleichung $a+y = b$ hat in $(\mathbb{Q}, +)$ genau eine Lösung y.

Def.5.3:(Subtraktion in $\mathbb{Q}$)

Seien $a,b \in \mathbb{Q}$. Die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a+y = b$ wird als Differenz der Zahlen b und a bezeichnet.
Schreibweise: $b-a = y \leftrightarrow a+y = b$.
Nach Satz 1.2 ist die Subtraktion in $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt ausführbar.

Bemerkung: "-" hat verschiedene Bedeutungen:
i) Subtraktion
ii) Vorzeichen
iii) Kennzeichnung des additiv Inversen

Def. 5.4 (Multiplikation in $\mathbb{Q}$):
Für alle $p, q \in \mathbb{Q}^+$ sei:

$$p\bullet 0 := 0\bullet p := 0$$
$$0\bullet 0 := 0$$
$$(-p)\bullet 0 := 0\bullet(-p) := 0$$
$$p\bullet(-q) := (-q)\bullet p := -(p\bullet q)$$
$$(-p)\bullet(-q) := p\bullet q$$

Satz 5.2:
$p,q \in \mathbb{Q}$, dann $p\bullet q = 0 \leftrightarrow p = 0 \vee q = 0$

Satz 5.3:
$(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \bullet)$ ist eine kommutative Gruppe

Beweis:
i) Abgeschlossenheit:
$p, q \in \mathbb{Q} \Rightarrow p\bullet q \in \mathbb{Q}$ (nach Def.2, Def. von $\bullet$ in $\mathbb{Q}^+$ und Satz 5.2)
ii) Existenz des neutralen Elements:
sei $q \in \mathbb{Q}$
Beh.: $1 \in \mathbb{Q}^+$ ist neutrales Element in $\mathbb{Q}$
1. Fall: $q \in \mathbb{Q}^+ \rightarrow q\bullet 1 = q$ nach Def. von $\bullet$ in $\mathbb{Q}^+$
2. Fall: $q = -r$ mit $r \in \mathbb{Q}^+$
$\rightarrow q\bullet 1 = (-r)\bullet 1 = -(r\bullet 1) = -r = q$
iii) Existenz des inversen Elementes:
sei $q \in \mathbb{Q}$
1. Fall: $q \in \mathbb{Q}^+$, dann wissen wir, daß q ein multiplikatives Inverses $q^{-1} \in \mathbb{Q}^+$ besitzt, weil $(\mathbb{Q}^+, \bullet)$ eine Gruppe ist. Es gilt also:

$q^{-1} \bullet q = 1$
2. Fall: $q = -r$ mit $r \in \mathbb{Q}^+$
nach Def. 4.4 ist dann $(-r^{-1}) \bullet (-r) = r^{-1} \bullet r = 1$

iv) Assoziativgesetz für $\bullet$
v) Kommutativgesetz:

Bem.:
Das multiplikativ Inverse einer rationalen Zahl q ist die Lösung der Gleichung $q \bullet x = 1$ und wird als $\frac{1}{q}$ bezeichnet.

Def.5.5 (Division in $\mathbb{Q}$):
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a \bullet y = b$ wird als Quotient der Zahlen b und a bezeichnet.
Schreibweise: $\frac{b}{a} = y \leftrightarrow a \bullet y = b$.
Nach Satz 1.2 ist die Division in $\mathbb{Q}$ (bis auf Division durch 0) uneingeschränkt ausführbar.

Folgerung:
Die rationalen Zahlen bilden mit den oben definierten Operationen "+" und "$\bullet$" einen Körper (das Distributivgesetz wäre noch zu zeigen).

Anordnung:

Def. 5.6:
$a < b \leftrightarrow a + x = b$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{Q}^+$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Q}$.

Literatur:

F. Padberg/R. Danckwarts/M. Stein: Zahlbereiche
J. Wisliceny: Grundbegriffe der Mathematik – Band II
J. Guddat: Lineare Algebra und Analytische Geometrie